gerentibus et *C. Turczaninowii* Hance, a qua recedit *fructu costato*. — Folia asymetrica, cordata et 1-2 superdentata; bracteis dentatis, non lobatis.

CHINE. — Kouy-tchéou : Pin-fa, 28 mars 1903, n° 1011 (*Cavalerie*).

M. Lutz donne lecture de la communication suivante :

Divergences phyllotaxiques,

PAR M. J. D'ASCENSÃO GUIMARÃES.

I. On appelle angle de divergence, ou simplement *divergence* de deux feuilles insérées dans une branche, l'angle dièdre formé par les deux plans qui, passant par l'axe de la branche, coupent la surface de celle-ci selon les génératrices des points d'insertion des deux feuilles.

La divergence ainsi définie pourrait avoir deux valeurs dont le total serait 360°; mais, si ces deux valeurs ne sont pas égales, on adopte toujours la plus petite. Il est donc admis que la divergence ne doit être que de 180° (feuilles distiques) ou au-dessous de 180°.

En général, sur une branche, la divergence de deux feuilles consécutives est constante. On nomme *hélice foliaire primaire* celle qui relie les insertions de toutes les feuilles de la branche, en passant successivement d'une feuille à celle qui la suit dans l'ordre d'insertion et suivant toujours la moindre divergence.

Le *cycle* de l'hélice primaire est la partie de l'hélice comprise entre les deux feuilles les plus proches dont les insertions ont la même génératrice.

Pour que l'hélice, partant d'une feuille, parcoure un cycle, c'est-à-dire pour qu'elle passe par l'insertion de la feuille la plus proche ayant la même génératrice, elle peut avoir à faire plusieurs fois le tour de la branche et chaque tour est représenté en projection horizontale (en supposant que l'axe de la branche est vertical) par une circonférence ou 360°. Un cycle peut donc être représenté par p 360°, p étant un nombre entier, généralement invariable pour chaque espèce.

En général, le nombre de feuilles n d'un cycle est constant aussi pour chaque espèce. Dans ce nombre n, on ne compte qu'une des feuilles de la même génératrice; c'est-à-dire que, si

l'on part de la feuille 0 (en passant par les feuilles 1, 2, 3...), la dernière feuille du cycle sera de l'ordre n ; et que, si l'on part de la feuille 1, la dernière feuille du cycle serait $n + 1$, etc.

Par conséquent, n représente le nombre d'angles de divergence que l'hélice primaire doit embrasser dans le parcours d'un cycle.

La divergence de deux feuilles consécutives de l'hélice primaire est représentée par $\frac{p\ 360^\circ}{n}$, vu que la somme des n divergences égales donnerait le cycle $p\ 360^\circ$. Ces nombres p et n sont

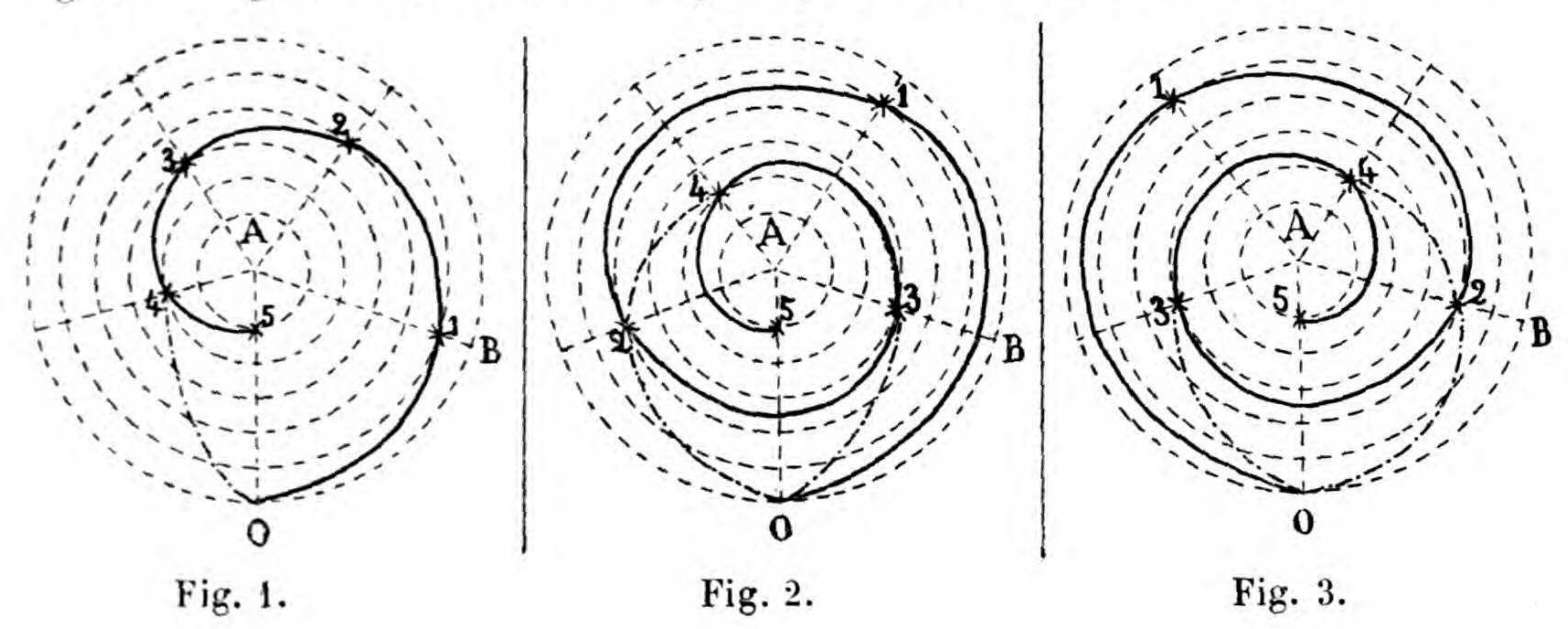


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

nombres premiers entre eux ; car, s'ils avaient un facteur commun 2, 3..., le cycle serait la moitié, le tiers, etc.

Les plans qui passent par l'axe de la branche et par les génératrices de toutes les feuilles d'un cycle divisent le cercle horizontal (normal à l'axe) en n secteurs égaux. Chacun de ces secteurs a donc un angle égal à $\frac{360^\circ}{n}$; ce sera le *petit secteur*.

Si p est égal à 1, la divergence sera égale à $\frac{360^\circ}{n}$, et alors le petit secteur aura la valeur de la divergence. Si p est égal à 2, l'hélice primaire, pour passer d'une feuille à l'autre, devra parcourir deux petits secteurs ou $2 \times \frac{360^\circ}{n}$; si p est égal à 3, elle devra parcourir $3 \times \frac{360^\circ}{n}$, etc.

Donnons un exemple pour un cas simple où $n = 5$.

Pour représenter l'hélice, il est plus commode de la supposer conique, car, ainsi, les projections des cycles ne se superposant pas, la disposition des feuilles est représentée avec clarté dans la projection en spirale.

Dans les trois figures 1, 2 et 3, le petit secteur est toujours le même, mesuré par $\frac{360^\circ}{5}$. Ce sont les divergences qui varient : $\frac{1}{5}\,360^\circ$, $\frac{2}{5}\,360^\circ$ et $\frac{3}{5}\,360^\circ$; mais comme dans ce dernier cas la divergence est plus grande que 180°, on décrit la spirale vers la gauche, contrairement aux deux premières qui tournent vers la droite.

II. Nous avons défini *hélice primaire*, celle qui passe successivement par toutes les insertions des feuilles consécutives en hauteur, en parcourant de l'une à la suivante le grand secteur ou plutôt la divergence $p\,\frac{360^\circ}{n}$. En plus de celle-ci, nous pourrons toujours tracer d'autres hélices, que nous appellerons *secondaires*, en réunissant, autant vers la droite que vers la gauche, l'insertion d'une feuille à l'insertion d'une autre feuille du même cycle dont elle ne soit séparée que par un petit secteur. Quand les entre-nœuds sont très courts, on ne distingue pas les hélices primaires; mais dans ce cas les hélices secondaires deviennent très apparentes, formées comme elles sont par les feuilles ou fleurs qui, étant plus rapprochées, se touchent et se compriment, se disposant en alignements parfaitement visibles dans l'un et l'autre sens. Sur les épis denses et sur les pommes de Pin, il est relativement facile de suivre et de compter ces hélices secondaires.

Quand $p = 1$, une des hélices secondaires coïncide avec l'hélice primaire ; pour toutes les autres valeurs de p, il y a deux hélices secondaires distinctes, partant d'une feuille, l'une vers la droite et l'autre vers la gauche. Dans la fig. 1, $\widehat{04}$, dans la fig. 2, $\widehat{02}$ et $\widehat{03}$, dans la fig. 3, $\widehat{03}$ et $\widehat{02}$ sont des traces des hélices secondaires.

III. Étudions maintenant les rapports ou liaisons qui existent entre l'hélice primaire et les secondaires. Voyons comment il est toujours possible de déterminer la divergence et la direction de l'hélice générale ou primaire, connaissant seulement le nombre d'hélices secondaires vers la droite et vers la gauche.

Admettons que la feuille 0 est la première du cycle et n la première du cycle suivant, que l'hélice générale monte vers la

droite, et enfin que les deux feuilles situées vers la droite et vers la gauche, dont les génératrices sont le plus rapprochées de la génératrice de 0, ou qui en divergent de $+\frac{360^\circ}{n}$ ou $-\frac{360^\circ}{n}$, sont d'ordre ν et μ.

Fig. 4.

Pour parvenir à la feuille ν, en parcourant l'hélice générale à partir de 0, il faudra passer par $\nu - 1$ feuilles (ne comptant pas 0 et ν), et réunir ν divergences de $\frac{p\,360^\circ}{n}$ chacune; d'ailleurs ce chemin parcouru doit être égal à un nombre entier ρ de circonférences, plus un petit secteur $\frac{360^\circ}{n}$. Nous aurons donc

$$\nu \frac{p\,360^\circ}{n} = \rho\,360^\circ + \frac{360^\circ}{n},$$

ou

$$\nu \frac{p}{n} = \rho + \frac{1}{n}. \qquad \text{(A)}$$

De même, μ étant la feuille génératrice la plus rapprochée de la gauche, pour y arriver en partant de 0, il faut parcourir dans l'hélice primaire μ fois la divergence $\frac{p\,360^\circ}{n}$, en décrivant un nombre entier ρ' de circonférences, moins un petit secteur $\frac{360^\circ}{n}$; donc

$$\mu \frac{p\,360^\circ}{n} = \rho'\,360^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

ou

$$\mu \frac{p}{n} = \rho' - \frac{1}{n}. \qquad \text{(B)}$$

Supposons qu'il y a deux systèmes d'inconnues qui satisfont l'équation (A)

$$\nu \frac{p}{n} = \rho + \frac{1}{n}$$

$$\nu_1 \frac{p}{n} = \rho_1 + \frac{1}{n}.$$

En soustrayant, on a :

$$\frac{\nu - \nu_1}{\rho - \rho_1} = \frac{n}{p}$$

n et p étant nombres premiers entre eux, et ν, ν_1, ρ et ρ_1, nombres entiers, $\nu - \nu_1$ ne peut être égal qu'à n ou à un multiple de n, et $\rho - \rho_1$ égal à p ou à un multiple de p. D'où l'on tire les conclusions suivantes :

1° Il y a une seule valeur de ν comprise (dans un cycle) entre 0 et n qui réponde à l'équation (A); car, s'il y en avait deux, $\nu - \nu_1$ ne pourrait être égal ou supérieur à n.

2° Toutes les valeurs de ν, correspondantes aux cycles successifs, $\nu + n$, $\nu + 2n$, $\nu + 3n$..., conjuguées avec les valeurs de ρ : $\rho + p$, $\rho + 2p$, $\rho + 3p$... tiennent dans la même équation (A), ce qui devient aussi évident, en ajoutant p, $2p$, $3p$... aux deux membres de (A).

$$(\nu + n)\frac{p}{n} = (\rho + p) + \frac{1}{n}$$

$$(\nu + 2n)\frac{p}{n} = (\rho + 2p) + \frac{1}{n}.$$

Nous ferions un pareil raisonnement pour μ et ρ.

Pour une divergence donnée, les équations (A) et (B) s'appliquent à un groupe quelconque de trois feuilles de génératrices contiguës du même cycle et subsistent quelle que soit la feuille du cycle que l'on prenne pour origine. Une feuille que l'on considère dans un cycle déterminé, et à laquelle on ait attribué le numéro d'ordre 0, a toujours dans les hélices secondaires, vers la droite et vers la gauche, deux feuilles plus rapprochées, d'ordre ν et μ, nombres entiers qui sont constants pour la même divergence, comme sont constants aussi les nombres entiers ρ et ρ' de tours, comptés sur l'hélice primaire, pour atteindre la génératrice de 0 aux points voisins des mêmes feuilles ν et μ.

En réunissant les deux équations (A) et (B), membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{p}{n} = \frac{\left(\rho + \frac{1}{n}\right) + \left(\rho' - \frac{1}{n}\right)}{\nu + \mu}. \qquad \text{(C)}$$

La feuille ν diverge de la feuille 0, comme nous avons déjà vu, $\left(\rho + \frac{1}{n}\right)$ 360°, et de la feuille n, sa voisine à gauche (dans le cycle $\overline{\nu, \nu + n}$), autant que 0 diverge de μ, ou $\left(\rho' - \frac{1}{n}\right)$ 360°; or

la somme algébrique du nombre de tours parcourus, dans l'hélice primaire, de 0 à ν et de ν à n, est le nombre de tours du cycle, ou p; donc, si pour un cycle les numérateurs de (C) sont égaux, les dénominateurs le seront aussi, ou $n = \nu + \mu$.

Nous arriverions plus vite à la même conclusion en comparant les cycles $\overline{0\ n}$ et $\overline{\nu,\ \nu + n}$, μ étant constant pour tous les cycles de la même divergence, si, dans le cycle $\overline{\nu,\ \nu + n}$, ν était zéro, n serait μ, ou $n - \nu = \mu$.

Ce principe s'énonce ainsi :

« En prenant une feuille pour origine (0) du cycle, la somme des numéros d'ordre des deux feuilles contiguës (vers la droite et vers la gauche) des hélices secondaires est égale au dénominateur de la divergence de l'hélice primaire. »

*
* *

Voyons maintenant en combien d'hélices secondaires, vers la droite et vers la gauche, se décompose l'hélice primaire.

Si de la feuille 0 part, vers la droite, une hélice secondaire qui ne rencontre d'abord que la feuille de l'ordre ν, puis une autre de l'ordre $2\,\nu$, $3\,\nu$, etc., de la feuille 1 partira une autre hélice qui ne rencontrera que les feuilles $\nu + 1$, $2\,\nu + 1$, $3\,\nu + 1$, etc., de la feuille 2 partira une autre hélice qui ne rencontrera que les feuilles $\nu + 2$, $2\,\nu + 2$, $3\,\nu + 2$, et ainsi successivement, en sorte que nous aurons (en partant de 0 jusqu'à $\nu - 1$) ν hélices secondaires vers la droite. Et de même on démontre qu'il y aurait μ hélices secondaires vers la gauche.

Ainsi encore nous pourrions énoncer le principe antérieur, en disant que « le dénominateur de la divergence de l'hélice primaire est égal à la somme du nombre des hélices secondaires, vers la droite et vers la gauche, en lesquelles il est possible de décomposer l'hélice primaire. »

IV. Étant connus les numéros d'ordre ν et μ, ou le nombre d'hélices secondaires vers la droite et vers la gauche, on détermine le numérateur de la divergence, en trouvant par le procédé ordinaire les valeurs de p entières, conjuguées avec les valeurs

de ρ, aussi entières, qui répondent à l'une ou à l'autre des équations

$$\nu\frac{p}{n}=\rho+\frac{1}{n} \qquad \text{(D)}$$

$$\mu\frac{p_2}{n}=\rho_2+\frac{1}{n} \qquad \text{(E)}$$

où sont connus ν, μ, n; donc $n=\nu+\mu$.

Entre ces valeurs, on choisit pour p la valeur comprise entre 0 et $\frac{n}{2}$.

En multipliant les deux membres de (D) par μ et de (E) par ν et en additionnant, on a

$$\frac{\nu\mu}{n}(p+p_2)=\rho\mu+\rho_2\nu+\frac{\mu+\nu}{n}=\rho\mu+\rho_2\nu+1 \qquad \text{(F)}$$

Des équations (D) et (E) on déduit que n est nombre premier avec les produits νp et μp, donc avec les facteurs ν et μ, et par conséquent nombre premier aussi avec leur produit $\nu\mu$.

Dans l'équation (F), comme le second membre est un nombre entier, $p+p_2$ doit être divisible par n; mais, vu que p et p_2 sont moindres que n, leur somme sera forcément égale à ce nombre.

Il est donc indifférent que l'équation (D) soit résolue avec la valeur de ν ou celle de μ, pourvu que l'on prenne pour valeur de p_2 la valeur trouvée ou la valeur complémentaire par rapport à n, selon qu'elle est inférieure (ou égale), ou supérieure à $\frac{1}{2}n$.

Exemples : Nous avons compté, sur un rameau à entre-nœuds courts, $\mu=2$ et $\nu=5$, nous aurons

$$5\frac{p}{7}=\rho+\frac{1}{7} \qquad \text{ou}$$

$$5p-7\rho=1$$

$$p=\frac{1+7\rho}{5}=\rho+\frac{2\rho+1}{5}=\rho+t$$

$$\rho=\frac{5t-1}{2}=2t+\frac{t-1}{2}=2t+t'$$

$$t=2t'+1$$

$$\rho=5t'+2$$

$$p=7t'+3$$

pour $t'=0$ il y a $\rho=2$ et $p=3$, valeurs qui satisfont, la divergence étant $\frac{3}{7}$. Si nous avions résolu l'équation

$$2\frac{p}{7} = \rho + \frac{1}{7}$$

$$2p - 7\rho = 1$$

$$p = \frac{7\rho + 1}{2} = 3\rho + \frac{\rho + 1}{2} = 3\rho + t$$

$$\rho = 2t - 1$$

$$p = 7t - 3\,;$$

pour $t = 1$ il résulte $p = 4$, valeur qui ne satisfait pas, parce qu'elle est plus grande que $\frac{1}{2}\,7$; il faut alors adopter la complémentaire 3.

Le nombre d'hélices secondaires, dans l'un et l'autre sens, étant connu, il est donc toujours possible, en appliquant les principes très élémentaires de l'analyse indéterminée du premier degré, de trouver le numérateur de la divergence de l'hélice primaire.

V. Nous devons encore, pour compléter cette étude du cas général, indiquer comment, les nombres ν et μ étant connus, on détermine la direction de l'hélice primaire.

Si l'hélice générale change de sens, en conservant la divergence, ν qui était vers la droite passe vers la gauche, et μ qui était vers la gauche passe vers la droite.

Puisque nous n'admettons que les divergences au-dessous de 180°, la deuxième feuille (n° 1) doit toujours être située du côté de ν, c'est-à-dire de la feuille dont la divergence totale (comptée sur l'hélice primaire) par rapport à la feuille 0, soit égale à un nombre exact de circonférences *plus* un petit secteur. Ainsi la direction de l'hélice primaire sera celle des hélices secondaires dont le nombre ν (ou μ) satisfasse à l'équation

$$\nu\frac{p}{n} = \rho + \frac{1}{n}.$$

Dans le cas, déjà considéré, de la divergence égale à $\frac{3}{7}$, l'hélice générale a la direction des 5 hélices secondaires, car

$$5 \times \frac{3}{7} = 2 + \frac{1}{7}.$$

VI. La divergence étant connue, il est toujours possible de déterminer le nombre d'hélices secondaires dans les deux sens. Le procédé à suivre est analogue à celui du § IV.

Dans l'équation

$$\nu \frac{p}{n} = \rho + \frac{1}{n}$$

sont inconnus ν et ρ, dont les valeurs sont trouvées par l'analyse indéterminée.

Donnons un exemple avec la même divergence $\frac{3}{7}$.

$$\nu \frac{3}{7} = \rho + \frac{1}{7}$$

$$3\nu - 7\rho = 1$$

$$\nu = \frac{7\rho + 1}{3} = 2\rho + \frac{\rho + 1}{3} = 2\rho + t$$

$$\rho = 3t - 1$$

$$\nu = 7t - 2$$

Pour $t = 1$ $\quad \nu = 5 \quad \rho = 2 \quad \mu = 2 \quad \rho' = 1.$

Dans la direction de l'hélice générale, il y aura 5 hélices secondaires et 2 dans la direction contraire.

VII. Les divergences que l'on trouve le plus souvent dans la nature sont :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} \text{ de } 360^\circ.$$

Si nous prenons deux de ces divergences pour premiers termes d'une série où les numérateurs et les dénominateurs des termes suivants soient égaux à la somme, respectivement, des numérateurs et des dénominateurs des termes antérieurs, nous obtiendrons différentes fractions de la circonférence qui représentent des divergences plus ou moins vulgaires dans la nature.

Ainsi la série

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \overset{<}{\frac{3}{8}}, \quad \overset{>}{\frac{5}{13}}, \quad \overset{<}{\frac{8}{21}}, \quad \overset{>}{\frac{13}{34}}, \quad \frac{21}{55}, \quad \frac{34}{89} \cdots\cdots$$

est appelée normale, parce qu'elle est plus commune, et, pour ce motif, nous l'étudierons plus longuement.

Les termes de la série normale sont les réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Un terme quelconque de la série est alternativement plus

grand que les termes antérieur et postérieur, ou plus petit que les termes antérieur et postérieur. La différence entre deux divergences consécutives décroît rapidement vers la limite

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,360^{\circ}=137^{\circ}\ 30'\ 28'',$$

valeur obtenue avec l'approximation de 0,05 de la seconde.

Le terme d'ordre n_1 de la série normale, déterminé selon la théorie des séries récurrentes, est

$$Dn_1=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}\right]}$$

VIII. Étudions maintenant le cas spécial où le numérateur de la divergence de l'hélice primaire est égal au numéro d'ordre de la feuille contiguë d'une des hélices secondaires, en partant de la feuille 0. Pour cela il faut que p soit égal à μ ou à ν, ou ω étant nombre entier

$$p\,\frac{p}{n}=\omega\pm\frac{1}{n}$$

$$p^2=\omega n\pm 1.$$

Il faut donc que le carré de μ ou de ν divisé par $\nu+\mu$ ou n donne au quotient un nombre entier et au reste 1 ou $n-1$.

Tous les termes de la série normale satisfont à cette condition et il est facile de démontrer que

$$\text{(G)}\qquad \frac{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1}\right]^2}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}\right]}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1-2}\right]\pm\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}-\left(\frac{1\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}\right]}$$

vu que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1}=(-1)^{n_1}\qquad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4=7.$$

Dans l'équation (G) on emploie les signes $\pm$ selon que n est pair ou impair.

On interprète l'équation (G) en disant que le numérateur du terme d'ordre n de la série normale, élevé au carré et divisé par le dénominateur (qui est égal au numérateur du terme d'ordre

$n_1 + 2$), donne au quotient le numérateur du terme d'ordre $n_1 - 2$ et au reste l'unité, si n_1 est pair, ou l'unité négative (-1) si n_1 est impair.

D'après ce que nous avons exposé au § V, dans la série normale, dans les termes d'ordre pair, l'hélice primaire a la direction de l'hélice secondaire qui passe par les feuilles 0 et ν, si $\nu < \mu$, ou celle de l'hélice secondaire 0, μ, si $\mu < \nu$, et dans les termes d'ordre impair elle a la direction de l'hélice secondaire 0, ν, si $\nu > \mu$, ou celle de l'hélice secondaire 0, μ, si $\mu > \nu$.

En résumé : dans la série normale, le numérateur de la divergence est toujours égal au plus petit nombre des hélices secondaires, et l'hélice primaire a la direction des hélices secondaires en plus grand nombre dans les termes d'ordre impair et a la direction du plus petit nombre dans les termes d'ordre pair.

IX. La série où les deux premiers termes sont $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire les mêmes que dans la série normale, mais invertis, s'appelle série conjuguée de la normale.

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{8}{19}, \quad \frac{13}{31}.$$

M. Van Tieghem, dans le *Traité de Botanique* (1891), à la fin de la page 63, et dans les *Éléments de Botanique* (1898), page 263, dit que pour cette série on applique les mêmes principes de la série normale, pour déterminer la divergence de l'hélice générale en fonction des hélices secondaires.

Il nous semble que cela n'est pas tout à fait exact.

Dans la série $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ seuls les termes $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{12}$ satisfont à la condition que le carré du numérateur, additionné ou diminué d'une unité, soit divisible par le dénominateur.

Nous avons déjà vu au § IV que dans la divergence $\frac{3}{7}$ $\nu = 5$ et $\mu = 2$, c'est-à-dire diffèrent de 3. Il en est de même pour tous les termes, excepté le 3[e] et le 5[e]. Aussi dans la série $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{5}{17}, \quad \frac{8}{27}\ldots$$

le terme $\frac{3}{10}$ satisfait à cette condition.

Dans les divergences appartenant aux séries $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$ $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$, d'ailleurs moins vulgaires dans la nature que la série normale, les nombres d'hélices secondaires vers la droite et vers la gauche étant connus, on détermine le numérateur par le procédé indiqué au § IV.

X. Par l'étude du tableau suivant, où sont inscrites, sur les divergences respectives, les valeurs de ν (nombre des hélices secondaires dans le sens de l'hélice primaire), et inférieurement les valeurs de μ (nombre des hélices secondaires dans la direction contraire de l'hélice primaire), il est facile de déduire un nouveau moyen de déterminer ces valeurs.

$\nu =$		3,	3,	8,	8,	21,	21,	55
$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{5}{13}$,	$\frac{8}{21}$,	$\frac{13}{34}$,	$\frac{21}{55}$,	$\frac{34}{89}$.....
$\mu =$	2,	2,	5,	5,	13,	13,	34,	34
$\nu =$		4,	4,	11,	11,	29,	29,	76
$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{7}$,	$\frac{3}{11}$,	$\frac{5}{18}$,	$\frac{8}{29}$,	$\frac{13}{47}$,	$\frac{21}{76}$,	$\frac{34}{123}$.....
$\mu =$	3,	3,	7,	7,	18,	18,	47,	47
$\nu =$		5,	5,	14,	14,	37,	37,	97
$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{2}{9}$,	$\frac{3}{14}$,	$\frac{5}{23}$,	$\frac{8}{37}$,	$\frac{13}{60}$,	$\frac{21}{97}$,	$\frac{34}{157}$.....
$\mu =$	4,	4,	9,	9,	23,	23,	60,	60
$\nu =$		3,	5,	5,	12,	12,	31,	31
$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{8}{19}$,	$\frac{13}{31}$,	$\frac{21}{50}$,	$\frac{34}{81}$.....
$\mu =$		2,	2,	7,	7,	19,	19,	50
$\nu =$		4,	7,	7,	17,	17,	44,	44
$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{7}$,	$\frac{3}{10}$,	$\frac{5}{17}$,	$\frac{8}{27}$,	$\frac{13}{44}$,	$\frac{21}{71}$,	$\frac{34}{115}$.....
$\mu =$		3,	3,	10,	10,	27,	27,	71
$\nu =$		5,	9,	9,	22,	22,	57,	57
$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{9}$,	$\frac{3}{13}$,	$\frac{5}{22}$,	$\frac{8}{35}$,	$\frac{13}{57}$,	$\frac{21}{92}$,	$\frac{34}{149}$.....
$\mu =$		4,	4,	13,	13,	35,	35,	92

Dans les séries $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$, où les premiers termes sont plus grands que les seconds, les dénominateurs des termes d'ordre pair sont égaux aux ν des deux termes suivants, et les

dénominateurs des termes d'ordre impair sont les μ des deux termes qui suivent le terme considéré.

Dans les séries conjuguées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$, où les premiers termes sont plus petits que les seconds, c'est le contraire qui arrive : les dénominateurs des termes d'ordre impair sont les ν des deux termes suivants, et les dénominateurs des termes d'ordre pair sont égaux aux μ des termes qui suivent le terme considéré.

En général, en un terme quelconque des séries antérieures, ν et μ sont les dénominateurs des deux termes précédents.

Parfois la divergence présente des valeurs bizarres, non incluses dans une des séries précédentes. Par exemple, sur l'épi du *Hoplophytum calyculatum* Koch, on compte 8 hélices secondaires vers la gauche et 11 vers la droite. L'hélice générale monte vers la droite et sa divergence est de $\frac{7}{19}$.

XI. Dans cette étude nous avons supposé que la divergence est toujours constante dans le même rameau ou dans la même espèce. Pour l'exposition de cette théorie élémentaire, cette hypothèse était la plus propice.

En pratique, cependant, quelquefois la divergence varie beaucoup, presque toujours pour les termes de la même série.

Dans la plupart des cas, il n'est pas difficile de déterminer la divergence, lorsque les nœuds sont éloignés; et quand les entrenœuds sont courts, dans les rameaux foliacés, les grappes, les épis et les capitules, il est facile, en général, de déterminer à chaque hauteur le nombre d'hélices secondaires vers la droite et vers la gauche et d'en déduire l'hélice primaire.

Dans le strobile du *Pinus Pinea*, par exemple, il est très facile de suivre les hélices secondaires et de dénombrer les écailles, car on reconnaît aussitôt qu'il a 8 hélices secondaires vers la gauche et 13 vers la droite, la divergence étant donc de $\frac{8}{21}$.

Quand on veut les dénombrer, on prend pour 0 l'écaille qui semble inférieure, et, à partir de celle-là, on marque sur les feuilles suivantes de l'hélice secondaire de la gauche 8, 16, 24, 32, 40..., et sur les écailles de l'hélice secondaire vers la droite 13, 26, 39, 52..., etc.; puis on comble les lacunes, en comptant

vers la gauche encore 8, encore 13 vers la droite et vers le haut encore 21.

Dans le *Pinus halepensis* on compte 8 hélices secondaires vers la droite et 5 vers la gauche. L'hélice primaire a la divergence $\frac{5}{13}$. Dans les cônes de ce Pin, la divergence dans les écailles inférieures est quelquefois de $\frac{8}{21}$.

XII. Schimper, A. Braun, Bravais, Naumann, Hofmeister et d'autres ont écrit sur la phyllotaxie des mémoires que, pour la plupart je n'ai pu consulter, car ils n'existent pas dans les bibliothèques de Lisbonne et ne sont pas en vente dans les librairies étrangères. Je ne sais donc pas ce qu'il peut y avoir de nouveau dans mon mémoire. Si cependant on connaît déjà le procédé si simple que j'indique pour déterminer dans tous les cas le numérateur de la divergence de l'hélice primaire à l'aide des nombres des hélices secondaires, il est vraiment surprenant que les traités de Botanique de plus grande vulgarisation n'y fassent pas la moindre allusion.

M. le Secrétaire général donne lecture de la communication suivante :

Influence de quelques substances sur le développement des Saprolégniées parasites des poissons,

PAR M. PAUL DOP.

Dans une communication récente (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 février 1905) j'ai indiqué les conditions du développement du *Saprolegnia Thureti* dans les milieux glucosés en vie soit aérobie, soit anaérobie. J'ai continué ces recherches sur d'autres substances organiques et minérales :

a. — **Substances organiques**. — 1° MANNITE. — Le mycelium du *Saprolegnia Thureti* a été ensemencé dans le milieu suivant :

Eau additionnée de cendres de levure. . . .	200 gr.
Mannite.	6 gr.
Acide citrique.	0 gr. 6